2009

2012

# Гравитационное взаимодействие в многомерных моделях

**М.В. Эйнгорн**

**Научный руководитель – А.И. Жук**

# Модели Калуцы-Клейна с тороидальной компактификацией дополнительных пространственных измерений

~~модели мира на бране~~

~~дополнительные временные измерения~~

~~нетороидальная (например, сферическая) компактификация~~

**Гравитационное взаимодействие**

~~**Электромагнетизм и др.**~~

# I. Нерелятивистский предел

**потенциал,
ускорение,
энергия,
сила**

**точка
сфера
шар**

**эффективная гравитационная постоянная**

**проблема иерархии**

$$M_{EW} \sim 10^{3}\,GeV \quad\quad M_{Pl(4)} \sim 10^{19}\,GeV$$

**экспериментальные ограничения на периоды торов
(размеры дополнительных измерений)**

## II. Приближение слабого гравитационного поля

частотный сдвиг
смещение перигелия
отклонение света

⟷ PPN формализм

пылеподобные и непылеподобные
материальные источники

**Солитоны**

уравнения состояния во внешнем и внутреннем пространствах
латентные солитоны, черные струны / браны

**экспериментальные ограничения на солитонные параметры**

## Многомерный нерелятивистский гравитационный потенциал покоящейся точечной частицы:

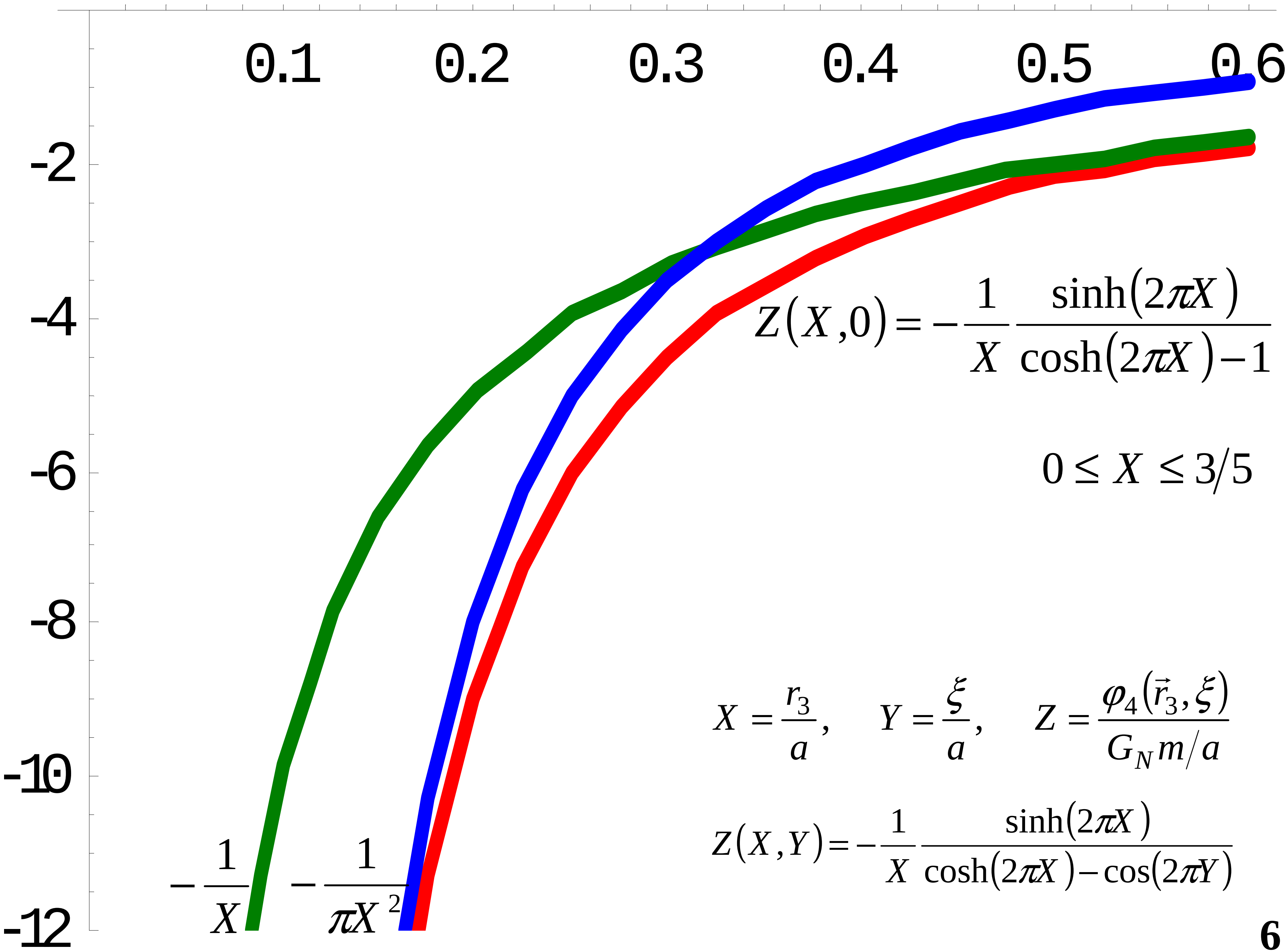
$$\varphi_D(\vec{r}_3,\xi_1,\ldots,\xi_d) = -\frac{G_N m}{r_3}\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty}\cdots\sum_{k_d=-\infty}^{+\infty}\exp\left[-2\pi\left(\sum_{i=1}^{d}\left(\frac{k_i}{a_i}\right)^2\right)^{1/2} r_3\right]$$

$$\times\cos\left(\frac{2\pi k_1}{a_1}\xi_1\right)\cdots\cos\left(\frac{2\pi k_d}{a_d}\xi_d\right)$$

$$\varphi_4(\vec{r}_3,\xi) = -\frac{G_N m}{r_3}\frac{\sinh\left(\frac{2\pi}{a}r_3\right)}{\cosh\left(\frac{2\pi}{a}r_3\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{a}\xi\right)}$$

## Соотношение между 4-мерным и многомерным фундаментальными планковскими масштабами:

$$\frac{S_D}{S_3}\frac{G_{\bar{D}}}{\prod_{i=1}^{d}a_i} = G_N \qquad \begin{cases} M_{Pl(4)} = G_N^{-1/2} \\ M_{Pl(\bar{D})} = G_{\bar{D}}^{-1/(2+d)} \end{cases} \qquad \frac{S_D}{S_3}M_{Pl(4)}^2 = M_{Pl(\bar{D})}^{2+d}\prod_{i=1}^{d}a_i$$



0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
-2
-4
-6
-8
-10
-12
$Z(X,0) = -\frac{1}{X}\frac{\sinh(2\pi X)}{\cosh(2\pi X)-1}$
$0 \le X \le 3/5$
$X = \frac{r_3}{a}, \quad Y = \frac{\xi}{a}, \quad Z = \frac{\varphi_4(\vec{r}_3, \xi)}{G_N m/a}$
$Z(X,Y) = -\frac{1}{X}\frac{\sinh(2\pi X)}{\cosh(2\pi X)-\cos(2\pi Y)}$
$-\frac{1}{X}$
$-\frac{1}{\pi X^2}$

# Бесконечно тонкая и произвольная сферические оболочки

**потенциалы гравитационного поля**
**радиальные ускорения пробных тел**
**собственная гравитационная энергия**

**численная оценка относительных отклонений**
**от стандартных ньютоновских выражений**

---

**1. Поля стандартной модели не локализованы на бране.**
**Из экспериментов по проверке закона Кулона:**

$$a_i \leq 10^{-17}\, cm$$

**2. Поля стандартной модели локализованы на бране.**
**Из экспериментов по проверке закона Ньютона:**

$$a_i \leq 10^{-2}\, cm$$

# Примеры логарифмических расходимостей:

## 1. сфера, 4-мерное пространство, потенциал

$$r_3 >> a, \quad R >> a, \quad |r_3 - R| << a$$

$$\varphi_4(r_3) \approx -\frac{G_N m}{R}\left[1 - \frac{a}{2\pi R}\ln\left(\frac{2\pi|r_3 - R|}{a}\right)\right] = -\frac{G_N m}{R}(1+\delta)$$

$$2\pi R = 10 \ \ cm \qquad 2\pi|r_3 - R| = a/10$$

$$\boxed{\delta = \begin{cases} 2.3\cdot 10^{-4}, & a = 10^{-3}\,cm \\ 2.3\cdot 10^{-18}, & a = 10^{-17}\,cm \end{cases}}$$

## 2. шар, 4-мерное пространство, ускорение

$$-\frac{d\varphi_4}{dr_3} \approx -\frac{G_N m}{R^2}\left[1 - \frac{3a}{2\pi R}\ln\left(\frac{2\pi(r_3 - R)}{a}\right)\right] = -\frac{G_N m}{R^2}(1+\tilde{\delta})$$

$$\boxed{\tilde{\delta} = 3\delta}$$

## Потенциал гравитационного поля покоящейся точечной частицы в юкавовском приближении

$$\varphi_D(r_3) \approx -\frac{G_N m}{r_3}\left[1+\alpha \exp\left(-\frac{r_3}{\lambda}\right)\right]$$

$$\alpha = 2s \qquad 1 \le s \le d \qquad \lambda = \frac{a}{2\pi} \qquad a = \max(a_i)$$

## Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух шаров в юкавовском приближении

$$U(r_3) \approx -\frac{G_N m m'}{r_3}\left\{1+18s\left(\frac{a}{2\pi R}\right)^3\left(\frac{a}{2\pi R'}\right)^3 \exp\left(-\frac{2\pi}{a}r_3\right)\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2\pi}{a}R\cosh\left(\frac{2\pi}{a}R\right)-\sinh\left(\frac{2\pi}{a}R\right)\right]\cdot\left[\frac{2\pi}{a}R'\cosh\left(\frac{2\pi}{a}R'\right)-\sinh\left(\frac{2\pi}{a}R'\right)\right]\right\}$$

# Абсолютная величина силы гравитационного взаимодействия двух шаров в юкавовском приближении

$$F(r_3) \approx \frac{G_N mm'}{r_3^2}\left\{1 + 18s\left(\frac{a}{2\pi R}\right)^3\left(\frac{a}{2\pi R'}\right)^3 \frac{2\pi r_3}{a}\exp\left(-\frac{2\pi}{a}r_3\right)\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{2\pi}{a}R\cosh\left(\frac{2\pi}{a}R\right) - \sinh\left(\frac{2\pi}{a}R\right)\right]\cdot\left[\frac{2\pi}{a}R'\cosh\left(\frac{2\pi}{a}R'\right) - \sinh\left(\frac{2\pi}{a}R'\right)\right]\right\}$$

$$r_3 > R + R' \qquad r_3 >> a \qquad R >> a, \; R' >> a$$

$$\boxed{F(r_3) \approx \frac{G_N mm'}{r_3^2}\left\{1 + \frac{9}{2}s\left(\frac{a}{2\pi R}\right)^2\left(\frac{a}{2\pi R'}\right)^2 \frac{2\pi r_3}{a}\exp\left[-\frac{2\pi}{a}(r_3 - R - R')\right]\right\} \approx \frac{G_{N(eff)}(r_3)mm'}{r_3^2}}$$

**эффективная гравитационная постоянная**

# Размазанные дополнительные измерения

**Топология:** $M_D = \mathbb{R}^3 \times T^{d-p} \times T^{p}, \quad p \le d$

**Периоды торов:** $a$ (для $T^{d-p}$), $b$ (для $T^{p}$)

$$\boxed{G_{N(eff)}(r_3) \approx G_N \left\{ 1 + \frac{9}{2}(d-p)\left(\frac{a}{2\pi R}\right)^2 \left(\frac{a}{2\pi R'}\right)^2 \frac{2\pi r_3}{a} \exp\left[-\frac{2\pi}{a}(r_3 - R - R')\right]\right\}}$$

$$G_N \times 10^{11} m^{-3} \cdot kg \cdot s^2 = 6.674215 \pm 0.000092; \quad 6.674252 \pm 0.000124$$

**Вашингтон** **Цюрих**

**Москва**

$R = 0.087\ cm$

$R' = 0.206\ cm$

$r_3 = 0.3773\ cm$

$$d = 1,\ p = 0,\ \alpha = 2,\ \lambda_{\max} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)_{\max} \approx 4.7 \times 10^{-3}\ cm$$

$$d = 6,\ p = 3,\ \alpha = 6,\ \lambda_{\max} = \left(\frac{a}{2\pi}\right)_{\max} \approx 3.4 \times 10^{-3}\ cm$$

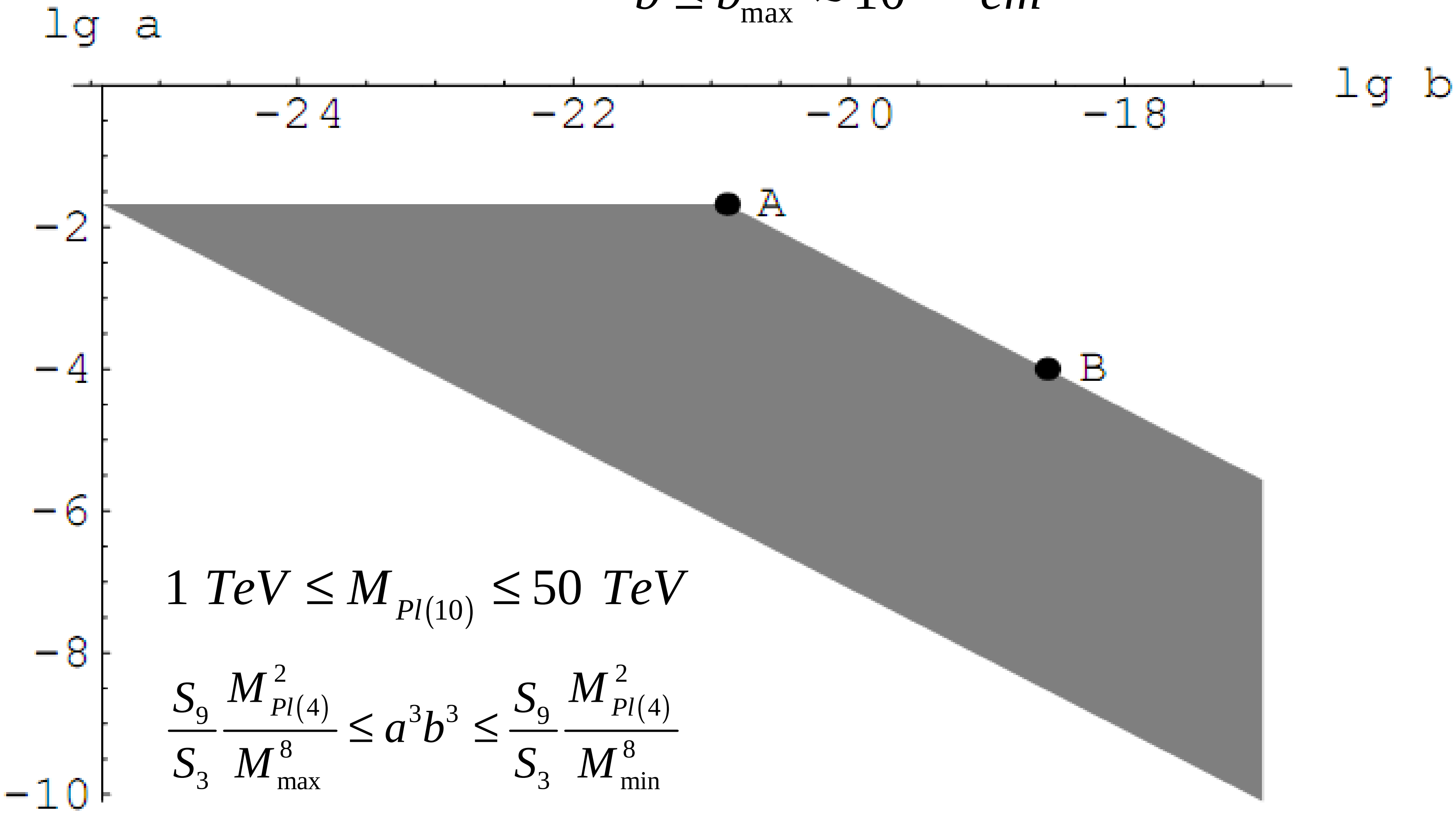
$\delta_G \approx 8.91 \times 10^{-12}$ $\delta_G \approx 1.06 \times 10^{-14}$

# Решение проблемы иерархии

$d=6,\quad p=3$

$$a \le a_{\max} \approx 2.1\times10^{-2}\ cm$$

$$b \le b_{\max} \approx 10^{-17}\ cm$$




$$1\ TeV \le M_{Pl(10)} \le 50\ TeV$$

$$\frac{S_9}{S_3}\frac{M_{Pl(4)}^2}{M_{\max}^8} \le a^3 b^3 \le \frac{S_9}{S_3}\frac{M_{Pl(4)}^2}{M_{\min}^8}$$

## Публикации

**1. Eingorn M., Zhuk A. Multidimensional gravity in the non-relativistic limit // Phys. Rev. D. - 2009. - V. 80. - 124037, 5 p.**

**2. Eingorn M., Zhuk A. The shape of multidimensional gravity: non-relativistic limit // Proceedings of the 4-th Gamow International Conference on Astrophysics and Cosmology and the 9-th Gamow Summer School “Astronomy and Beyond: Astrophysics, Cosmology, Radio Astronomy, High Energy Physics and Astrobiology”, Odessa. - American Institute of Physics, Conference Proceedings, “Astrophysics and Cosmology after Gamow”. - 2009. - V. 1206. - P. 122-133.**

**3. Eingorn M., Zhuk A. Non-relativistic limit of multidimensional gravity: exact solutions and applications // Class. Quant. Grav. - 2010. - V. 27. - 055002, 17 p.**

# Приближение слабого гравитационного поля для системы движущихся точечных частиц

**Уравнение Эйнштейна:** $$R_{ik} = \frac{2S_D\tilde{G}_{\bar{D}}}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{D-1}g_{ik}T\right)$$

**Тензор энергии-импульса:**

$$T^{ik} = \sum_{p=1}^{N} m_p\left[\left(-1\right)^D g\right]^{-1/2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^k}{dt}\frac{cdt}{ds}\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)$$

$$g_{00} \approx 1+\frac{2}{c^2}\varphi\left(\vec{r}\right)+\frac{2}{c^4}\varphi^2\left(\vec{r}\right)+\frac{2}{c^4}\sum_{p=1}^{N}\varphi'_p\varphi'\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)+\frac{D}{D-2}\frac{1}{c^4}\sum_{p=1}^{N}v_p^2\varphi'\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)$$

$$g_{0\alpha} \approx -\frac{2\left(D-1\right)}{D-2}\frac{1}{c^3}\sum_{p=1}^{N}v_{p\alpha}\varphi'\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)-\frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x^\alpha}$$

$$g_{\alpha\beta} \approx -\left(1-\frac{1}{D-2}\frac{2}{c^2}\varphi\left(\vec{r}\right)\right)\delta_{\alpha\beta}$$

$$\Delta\varphi = S_D G_{\bar{D}}\rho$$

$$\Delta\varphi' = S_D G_{\bar{D}} m_p \delta\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)$$

$$\Delta f = \varphi\left(\vec{r}\right)$$

$$\varphi\left(\vec{r}\right) = \sum_{p=1}^{N}\varphi'\left(\vec{r}-\vec{r}_p\right)$$

# Гравитационное поле одной покоящейся частицы

$$g_{00} \approx 1 + \frac{2}{c^2}\varphi(\vec{r}) + \frac{2}{c^4}\varphi^2(\vec{r}), \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} \approx -\left(1 - \frac{1}{D-2}\frac{2}{c^2}\varphi(\vec{r})\right)\delta_{\alpha\beta}$$

$$\Delta\varphi = S_D G_{\bar{D}} m \delta(\vec{r}) \longrightarrow \varphi \approx -\frac{G_N m}{r_3} = -\frac{c^2 r_g}{2 r_3}$$

**Метрика в изотропных 3D сферических координатах:**

$$r_g = \frac{2 G_N m}{c^2}$$

$$r_3 = |\vec{r}_3|$$

$$ds^2 \approx \left(1 - \frac{r_g}{r_3} + \frac{r_g^2}{2 r_3^2}\right) c^2 dt^2$$

$$-\left(1 + \frac{1}{D-2}\frac{r_g}{r_3}\right)\left(dr_3^2 + r_3^2 d\theta^2 + r_3^2 \sin^2\theta d\psi^2\right)$$

$$-\left(1 + \frac{1}{D-2}\frac{r_g}{r_3}\right)\left[\left(dx^4\right)^2 + \left(dx^5\right)^2 + \ldots + \left(dx^D\right)^2\right]$$

# Три релятивистских теста:
# частотный сдвиг, смещение перигелия, отклонение света

$$\boxed{\omega_2 \approx \omega_1 \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}\right)}$$

$$\boxed{\delta\psi = \frac{D\pi m'^2 c^2 r_g^2}{2(D-2)M^2}}$$

$$\boxed{\delta\psi = \frac{D-1}{D-2}\frac{r_g}{\rho}}$$

**General Relativity:**

$D = 3 \quad \Rightarrow \quad 42.94''$ $\qquad$ $D = 3 \quad \Rightarrow \quad 1.75''$

$D = 4 \quad \Rightarrow \quad 28.63''$ $\qquad$ $D = 4 \quad \Rightarrow \quad 1.31''$

$D = 9 \quad \Rightarrow \quad 18.40''$ $\qquad$ $D = 9 \quad \Rightarrow \quad 1.00''$

---

**Солитоны – точные статические сферически симметричные вакуумные решения многомерного уравнения Эйнштейна.**

$$R_{ik} = 0$$

$$ds^2 = A(r_3)c^2dt^2 + B(r_3)\left(dr_3^2 + r_3^2 d\Omega_2^2\right) + \sum_{i=1}^{N} C_i(r_3)ds_i^2 \qquad ds_i^2 = \sum_{j=1}^{d_i} d\xi_{i(j)}^2$$

$$ds^2=\left(\frac{ar_3-1}{ar_3+1}\right)^{2\theta}c^2dt^2-\left(1-\frac{1}{a^2r_3^2}\right)^2\left(\frac{ar_3+1}{ar_3-1}\right)^{2\theta(1-\tau)}\left(dr_3^2+r_3^2d\Omega_2^2\right)-\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{ar_3+1}{ar_3-1}\right)^{2\theta\gamma_i}ds_i^2$$

## Соотношения между солитонными параметрами:

$$\theta^2\left[(1-\tau)^2+\sigma+1\right]=2,\quad \tau=\sum_{i=1}^{N}d_i\gamma_i,\quad \sigma=\sum_{i=1}^{N}d_i\gamma_i^2$$

## Восстановление ньютоновского гравитационного потенциала:

$$\frac{4\theta}{a}=r_g=\frac{2G_Nm}{c^2}\quad\Rightarrow\quad A(r_3)\approx 1-\frac{r_g}{r_3}+\frac{r_g^2}{2r_3^2}\qquad h_{00}=-\frac{r_g}{r_3}$$

$$B(r_3)\approx -1-(1-\tau)\frac{r_g}{r_3}\qquad h_{\alpha\alpha}=-(1-\tau)\frac{r_g}{r_3},\ \alpha=1,2,3$$

$$\underbrace{C_i(r_3)\approx -1-\gamma_i\frac{r_g}{r_3}}_{\text{метрические коэффициенты}}\qquad \underbrace{h_{\mu_i\mu_i}=-\gamma_i\frac{r_g}{r_3}}_{\text{поправочные слагаемые}}$$

# Уравнения состояния материальных источников во внешнем и внутреннем пространствах в терминах компонент тензора энергии-импульса

$$\boxed{T_{\mu_i\mu_i} \approx \frac{\gamma_i - 1 + \tau}{2 - \tau} T_{00}}$$

$$\boxed{p_i = \frac{\gamma_i - 1 + \tau}{2 - \tau} \varepsilon}$$

**Экспериментальное ограничение:**

$$\tau = -(2.1 \pm 2.3) \times 10^{-5}$$

**Латентные солитоны**

$$\tau = \sum_{i=1}^{N} d_i \gamma_i = 0 \qquad p_i = \frac{\gamma_i - 1}{2} \varepsilon$$

**Черные струны / браны**

$$\gamma_i = 0 \qquad p_i = -\frac{1}{2} \varepsilon$$

# Публикации

**4.** Эйнгорн М.В., Жук А.И. Проблемные аспекты многомерия // Труды 10-й Гамовской астрономической конференции-школы “Астрономия на стыке наук - космомикрофизика, космология и гравитация, астрофизика, радиоастрономия, астробиология”, Одесса. - 2010. - С. 22-27.

**5.** Eingorn M., Zhuk A. Classical tests of multidimensional gravity: negative result // Class. Quant. Grav. - 2010. - V. 27. - 205014, 18 p.

**6.** Eingorn M., Zhuk A. Kaluza-Klein models: can we construct a viable example? // Phys. Rev. D. - 2011. - V. 83. - 044005, 11 p.

**7.** Eingorn M., Medeiros O.R., Crispino L.C.B., Zhuk A. Latent solitons, black strings, black branes, and equations of state in Kaluza-Klein models // Phys. Rev. D. - 2011. - V. 84. - 024031, 8 p.

## Основные выводы в отношении многомерных моделей Калуцы-Клейна с тороидальной компактификацией дополнительных пространственных измерений

1. В нерелятивистском пределе при достаточно малых периодах торов восстанавливается ньютоновский гравитационный потенциал и возможно решение проблемы иерархии.

2. В приближении слабого гравитационного поля пылеподобный источник противоречит данным наблюдений (смещение перигелия, отклонение света).

3. Латентные солитоны (непылеподобные источники) удовлетворяют экспериментам с той же точностью, что и общая теория относительности, но имеют неясную физическую интерпретацию.


Спасибо за внимание!
BATMAN ENDS
this spring