

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені І. І. МЕЧНИКОВА

ПАНЧЕНКО ДМИТРО ЮРІЙОВИЧ



УДК 538.915, 538.945

**СТРУКТУРА ТОЧКОВИХ ЗБУРЕНЬ ОПЕРАТОРА ШРЕДІНГЕРА
В ОДНОВИМІРНИХ ТА ДВОВИМІРНИХ КВАНТОВИХ
СИСТЕМАХ**

01.04.02 — теоретична фізика

АВТОРЕФЕРАТ

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Одеса — 2020

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана на кафедрі теоретичної фізики та астрономії Одеського національного університету імені І. І. Мечникова.

i : доктор фізико-математичних наук, професор
Кулінський Володимир Леонідович,
Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
професор кафедри теоретичної фізики та астрономії.

i i i : доктор фізико-математичних наук, професор
Вільчинський Станіслав Йосипович,
Київський національний університет імені Тараса
Шевченка, завідувач кафедри квантової теорії поля;
кандидат фізико-математичних наук
Рилюк Вячеслав Михайлович,
Державна установа “Відділення гідроакустики Інституту
геофізики ім. С.І. Субботіна НАН України”, науковий
співробітник.

Захист дисертації відбудеться “16” жовтня 2020 р. о 14⁰⁰ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 41.051.04 Одеського національного університету імені І. І. Мечникова за адресою:

65082 м. Одеса, вул. Пастера, 42, відділення фізики та астрономії ФМФІТ
ОНУ імені І. І. Мечникова, аудиторія 22.

З дисертацією можна ознайомитись у науковій бібліотеці Одеського національного університету імені І. І. Мечникова за адресою:

65082 м. Одеса, вул. Преображенська, 24

та на веб-сторінці спеціалізованої вченої ради Д 41.051.04 за адресою:

<http://onu.edu.ua/uk/science/spec-sci-council/d4105104>.

Автореферат розісланий “11” вересня 2020 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради Д 41.051.04
кандидат фізико-математичних наук



В. О. Ющенко

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Вивчення точкових потенціалів у квантовій фізиці останнім часом привертає все більшу увагу. Це пов'язано з тим, що точкові потенціали служать інструментом (в якості точно розв'язуваних моделей) для побудови квантових систем із керованими властивостями. Об'єктами застосування таких моделей можуть бути квантові точки та їх впорядковані структури, квантові магнітні сенсори, топологічні ізолятори та системи, де наявні псевдоспінові квантові числа. Дослідження локалізації носіїв (електронів) на таких точкових дефектах дає можливість створювати генератори випромінювання із параметрами, керованими ступенем локалізації в залежності від зовнішніх полів та нетривіальною внутрішньою структурою.

Хоча математична теорія таких моделей (т.з. сингулярних розширень ермітових операторів) добре розроблена принаймні у безспіновому випадку [1*], але розуміння її фізичної природи далеко від вичерпності. В останні роки розглядалися певні фізичні реалізації сингулярних взаємодій з точки зору шаруватих гетерогенних структур за допомогою чисто потенціальних моделей [2*], однак практично не приділялась увага спіновому випадку та відповідним інтерференційним ефектам, що проявляються за наявності магнітного поля чи магнітних дефектів. Зрозуміло, що в реальних системах, де носіями струмів (електричного чи спінового) є електрони, чи узагальнено ферміонні елементарні збудження, спін відіграє важливу роль. Дійсно, тренд останніх двох десятиліть у нанотехнологіях, пов'язаний із використанням спіну частинок як основної фізичної характеристики переносу та зчитування квантової інформації, вимагає дослідження спін-залежних взаємодій.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана на кафедрі теоретичної фізики та астрономії і в науково-дослідній лабораторії теоретичної та молекулярної фізики (НДЛ 14) Одеського національного університету імені І. І. Мечникова, а також є складовою частиною досліджень за держбюджетними темами: “Магнітні властивості наноструктур на основі графену” № держ. реєстрації 0115U003208; “Дослідження термодинамічних, критичних та кінетичних властивостей рідких металів та їх сплавів” № держ. реєстрації 0118U000202.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є пошук нових точно розв'язуваних квантово-механічних моделей для опису переносу зарядів і спінів та локалізованих станів їх носіїв в електронних наноструктурах.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є гетерогенні шаруваті наноструктури, електронна структура серцевини вихору Абрикосова.

Предмет дослідження. Фізична природа точкових збурень оператора Шредінгера в одному та двох вимірах та їх застосування для моделювання наноелектронних пристроїв.

Методи дослідження. При виконанні роботи застосовувалися методи квантової механіки, включаючи теорію самоспряжених розширень ермітових

операторів; методи теорії узагальнених функцій для дослідження диференціальних операторів із точковими збуреннями.

Наукова новизна отриманих результатів. В дисертаційній роботі були отримані наступні результати:

- побудована класифікація всіх розширень для одновимірного оператора Шредінгера згідно дії калібрувальної групи гамільтоніана, що відповідає вибору масштабу маси та фази хвильової функції (калібрування векторного потенціалу);
- в рамках цієї класифікації показано існування двох розширень (X_1 та X_4) потенціальної та двох розширень “магнітної” природи (чисте X_3 , змішане X_2);
- запропонована фізична реалізація розширень X_4 та X_2 в термінах масових стрибків якісно різного характеру. Крім того, показано, що ці розширення також відрізняються наявністю квантованого магнітного потоку у випадку розширення X_2 , тоді як випадок X_4 має “електростатичний” характер;
- отримані нестандартні сингулярні самоспряжені розширення для одновимірного гамільтоніана Паулі, які моделюють точкові (сингулярні взаємодії) із перевертанням спіну;
- показано, що фізична реалізація цих розширень описується спінімпульсною взаємодією;
- показано, що нестандартні граничні умови для гамільтоніана Ааронова – Бома з локалізованим магнітним полем можна фізично інтерпретувати як гамільтоніан для низькоенергетичних збуджень поблизу кору вихору Абрикосова. Це дає можливість описати аномалію Крамера – Пеши (параметр, що характеризує просторову зміну параметра порядку $d(r)/dr$) у корі вихору Абрикосова;
- отримано аналітичний вираз для енергії основного стану E_0 як функції радіуса кору вихору ξ_0 , який добре узгоджується з відомими результатами чисельного розв’язку рівнянь Боголюбова – де Жена інших авторів.

Практичне значення отриманих результатів. Представлена робота має цінність для конструювання наносхем із керованими властивостями. Отримані результати також можуть стати в нагоді для моделювання нанотранзисторів, спінових транзисторів, квантових вентилів (гейтів), а також можуть бути корисними для побудови елементної бази квантових комп’ютерів.

Особистий внесок здобувача. Загальна постановка задач у статтях належить проф. В.Л. Кулінському. При роботі над цими статтями здобувач виконував із науковим керівником паралельні взаємоконтролюючі теоретичні розрахунки, брав участь в інтерпретації результатів та підготовці їх до опублікування. Особисто здобувачем було отримано аналітичний вираз для енергії основного стану у корі вихору Абрикосова у квантовій границі та проведено порівняння цих результатів із чисельними розрахунками рівнянь Боголюбова – де Жена інших авторів. Також здобувачем було отримано граничні умови, пов’язані з локалізованим

магнітним полем, запропоновано ідею реалізації розширень X_4 та X_2 як масових стрибків якісно різного характеру та обчислено відповідні профілі ефективної маси.

Апробація результатів дисертації. Основні положення дисертаційної роботи доповідалися та обговорювалися на семінарах кафедри теоретичної фізики та астрономії і наукових конференціях Одеського національного університету імені І.І. Мечникова, а також на наукових конференціях та семінарах:

- 3-rd Conference “Statistical Physics: Modern Trends and Applications”, Lviv (Ukraine) 2009;
- конференція молодих вчених “Сучасні проблеми теоретичної фізики”, Київ (Україна) 2009;
- The 1st International Conference for Young Scientists “Low temperature physics”, Kharkov (Ukraine) 2010;
- VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics”, Kyiv (Ukraine) 2016;
- IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics”, Kyiv (Ukraine), 2018;
- Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of theoretical and mathematical physics”, Kyiv (Ukraine) 2019.

Публікації. За матеріалами дисертації опубліковано п’ять статей в наукових журналах та в шести тезах конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, розділу з оглядом літератури та трьох розділів основної частини, у яких викладені результати досліджень дисертанта, а також загальних висновків, розділу з подяками, переліку використаних літературних джерел та додатків. Загальний обсяг дисертації становить 125 сторінок, обсяг основного тексту — 97 сторінок. Робота містить 23 рисунка та 1 таблицю. Список використаних джерел складається з 90 найменувань та займає 10 сторінок.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, сформульовано мету роботи, визначено наукову новизну і практичну цінність отриманих результатів та наведено стисло характеристику дисертації.

Перший розділ присвячено огляду основних робіт, що стосується опису точково-подібних (сингулярних) взаємодій оператора Шредінгера для одновимірних і двовимірних квантових систем та розгляду електронної структури вихору Абрикосова, що є однією із складових механізму пінінгу цих вихорів.

У **підрозділі 1.1** розглянуто фізичні інтерпретації нетривіальних граничних умов (самоспряжених розширень) одновимірного гамільтоніана Шредінгера спочатку для безспінової вільної частинки, а потім – із включенням спінового ступеня вільності. Зокрема розглядається підхід П. Курасова [1*] по опису сингулярних

точкових взаємодій з точки зору теорії розподілів, що забезпечив відповідність між самоспряженими розширеннями (граничними умовами) гамільтоніана вільної частинки:

$$\hat{H}_0 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad (1)$$

та його сингулярними збуреннями вигляду:

$$L_X = D_x^2 (1 + X_4 \delta_0) + i D_x \left(2 X_3 \delta_0 + i X_4 \delta_0^{(1)} \right) + X_1 \delta_0 + (X_2 + i X_3) \delta_0^{(1)},$$

де символ D_x означає похідну в сенсі теорії розподілів на просторі функцій, що є неперервними в \mathbb{R}^1 , виключаючи точку сингулярності, де вони мають обмежені значення разом із похідними та визначають наступні лінійні функціонали [1*]:

$$\delta[\varphi] = \frac{\varphi(0+0) + \varphi(0-0)}{2}, \quad \delta^{(1)}[\varphi] = \frac{\varphi'(0+0) + \varphi'(0-0)}{2}.$$

Параметри X_i визначають значення розривів хвильової функції та її першої похідної.

У **підрозділі 1.2** розглянуто сингулярні взаємодії у двовимірній геометрії на прикладі розширень гамільтоніана Ааронова–Бома [3*] та показано, як можна визначити спектр у випадку такої розширеної задачі.

У **підрозділі 1.3** розглядаються основні особливості надпровідників II роду та наводиться короткий огляд основних робіт, в яких досліджувалася електронна структура вихору Абрикосова та механізм пінінгу вихорів.

Другий розділ присвячено детальному опису фізичної структури точково-подібних взаємодій для одновимірного оператора Шредингера безспінової вільної частинки (1) та їх зв'язку з калібрувальною симетрією.

У **підрозділі 2.1** наводиться аналіз симетрії самоспряжених розширень для одновимірного гамільтоніана вільної частинки (1). Показано, що такий гамільтоніан допускає два калібрувальні перетворення, пов'язані з наявністю у частинки маси та заряду. Калібрування маси пов'язане з вибором просторового масштабу $x \rightarrow \lambda x$, а калібрування заряду – з канонічним перетворенням $\hat{p}_x \rightarrow \hat{p}_x + A$. З цієї точки зору точкові збурення гамільтоніана (1) з'являються завдяки з'єднанню двох задач про рух вільної зарядженої частинки на півосях \mathbb{R} та \mathbb{R}_+ із різними калібруваннями. Іншими словами, калібрувальна симетрія може бути порушена в точці зшивання областей \mathbb{R} та \mathbb{R}_+ , що призводить до появи локалізованих точкових дефектів відповідного калібрувального поля.

Представлення калібрувальної групи симетрії у вигляді $G = D \ltimes A$, де D – мультиплікативна група позитивних дійсних чисел (масовий фактор), а A – адитивна група калібрувальних перетворень (калібрування векторного потенціалу), дало можливість класифікувати всі точкові дефекти для гамільтоніана (1) за дією цих двох груп на кожній із двох незалежних півосей за груповим законом:

$$g^{-1} g_+ = (1/\lambda, A) \quad (\lambda_+, A_+) = (\lambda_+/\lambda, A_+ + A).$$

Ця дія може бути неперервною (глобальна дія на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+$), тобто без стрибків маси та магнітного поля, або розривною щодо цих калібрувань. Неперервна дія означає, що $g^{-1}g_+ = (1, 0)$, $g \in \mathbb{D} \setminus A$ і відповідає δ -особливості. Інші три випадки, що класифікуються за розривною дією $g^{-1}g_+ = (\lambda_+/\lambda_-, A_+ \setminus A_-)$, пов'язані як зі стрибком ефективної маси частинки або наявністю локалізованого магнітного поля так і з їх комбінаціями. Всі чотири можливі типи точкових взаємодій зведені у таблиці 1.

1

Класифікація точкових взаємодій

$g^{-1}g_+$	Розривна величина	Тип взаємодії
$(1, 0)$	ψ^θ (δ -потенціал)	потенціальний
$(1, \phi)$	фаза (магнітний потік)	непотенціальний
$(\lambda, 0)$	ψ (маса)	потенціальний
(λ, ϕ)	ψ, ψ^θ (маса+квантований магнітний потік)	непотенціальний

Підрозділ 2.2 присвячено визначенню граничної умови для локалізованого магнітного поля, яка згідно класифікації точкових взаємодій $g^{-1}g_+$ (див. таблицю 1) належить до елемента $(1, \phi)$ та пов'язана із розривом величини фази хвильової функції. Тому фактично у цьому підрозділі розглядається дія локалізованого магнітного поля

$$H(x) = \begin{cases} H_0, & x \in [0, a], \\ 0, & x \notin [0, a] \end{cases} \quad (2)$$

на фазу хвильової функції частинки у двовимірній системі з трансляційною симетрією вздовж осі y .

Вимога неперервності хвильової функції та її похідної в точках зшивання областей задачі розсіювання вільної частинки на локалізованому магнітному полі (2) при переході до границі $a \rightarrow 0$ призводить до розриву хвильової функції та її похідної в точці $x = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\psi_{0+0}}{\psi_{0-0}} = e^{2i\pi\phi}, \\ \frac{\psi'_{0+0}}{\psi'_{0-0}} = e^{2i\pi\phi}, \end{cases} \quad (3)$$

де $\phi = \frac{\Phi}{\Phi_0}$; Φ – магнітний потік, Φ_0 – квант магнітного потоку, який припадає на одну заряджену частинку та дорівнює 2π .

Зазначимо, що (3) є в точності однією з граничних умов, пов'язаних із самоспряженістю гамільтоніана (1) [1*]:

$$e^{2\pi i\phi} = \frac{2 + iX_3}{2 - iX_3}. \quad (4)$$

У підрозділі 2.3 розглядається загальна форма граничних умов сингулярного одноточкового збурення гамільтоніана (1):

$$Y_{0+0} = M Y_{0-0}, \quad Y_{0-0} = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi^\theta \end{pmatrix}_{0-0},$$

де згідно з [4*] вид матриці граничних умов M визначається із вимоги неперервності густини струму ймовірності $j_{0+0} = j_{0-0}$:

$$\sigma_y = M^y \sigma_y M, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Всі типи матриць граничних умов (M -матриці), які задовільняють матричне рівняння (5), та відповідні їм матриці розсіювання (S -матриці) представлені у таблиці 2.

2

Типи матриць граничних умов та відповідні матриці розсіювання

Тип	M – матриця	S – матриця
I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X_1 & 1 \end{pmatrix}$	$A \begin{pmatrix} i X_1 & 2k \\ 2k & i X_1 \end{pmatrix}$
II	$\begin{pmatrix} 1 & X_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$B \begin{pmatrix} i k X_4 & 2 \\ 2 & i k X_4 \end{pmatrix}$
III	$\begin{pmatrix} e^{i2\pi\phi} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\phi} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & e^{2i\pi\phi} \\ e^{-2i\pi\phi} & 0 \end{pmatrix}$
IV	$\begin{pmatrix} \frac{2+X_2}{2} & 0 \\ X_2 & \frac{2-X_2}{2} \\ 0 & \frac{2+X_2}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
$A = \frac{1}{2k + i X_1}, B = \frac{1}{2 + i k X_4}, \tan \theta/2 = \frac{2 + X_2}{2 - X_2}.$		

За своєю фізичною природою можна виділити два класа матриць граничних умов. Перший представлений матрицями граничних умов I і II типу, для яких S -матриці задовільняють загальній властивості симетрії $\hat{S}(k) = \hat{S}(-k)$ і тому

відповідають потенціальній взаємодії. У зазначеній вище класифікації точкових взаємодій g^{-1} – g_+ (див. таблицю 1) матриці граничних умов I і II типу належать до елементів $(1, 0)$ і $(\lambda, 0)$ відповідно, та є точково-подібними взаємодіями електростатичного характеру.

Другий клас представлений матрицями граничних умов III і IV типу, для яких S-матриці є ермітовими, безслідовими і не залежать від енергії частинки. Хоча для граничної умови IV типу S-матриця є симетричною, тим не менш, у цьому випадку присутній цілочисельний (квантований) магнітний потік, як це впливає з вищезгаданої теоретико-групової класифікації точкових взаємодій g^{-1} – g_+ (див. таблицю 1). Згідно цієї класифікації, матриці граничних умов III і IV типу належать до елементів $(1, \phi)$ і (λ, ϕ) відповідно, та є точково-подібними взаємодіями “магнітного” типу.

У **підрозділі 2.4** демонструється, що точкові взаємодії, які пов’язані із граничними умовами II і IV типу (X_4 - та X_2 -розширення) (див. таблицю 2), можуть бути реалізовані в шаруватих системах із суттєвою неоднорідністю ефективної маси для елементарного збудження з якісно різним характером у прошарку, та описані гамільтоніаном типу

$$\hat{T}_a = \frac{1}{2} m^a(x) \hat{p} m^{-2a-1}(x) \hat{p} m^a(x),$$

де $m(x)$ – профіль ефективної маси частинки, а a – деякий сталий параметр.

З’ясовано, що для X_4 -розширення профіль ефективної маси $m_{X_4}^\varepsilon(x)$ має форму западини (далі, *mass-bump*) (див. рис. 1a), а відповідна точкова взаємодія по суті реалізується як нелокальний δ^l -потенціал. Для X_2 -розширення $m_{X_2}^\varepsilon(x)$ приймає форму стрибка маси (далі, *mass-jump*) (див. рис. 1б), а відповідну точкову взаємодію можна представити у вигляді локального δ^l -потенціалу.

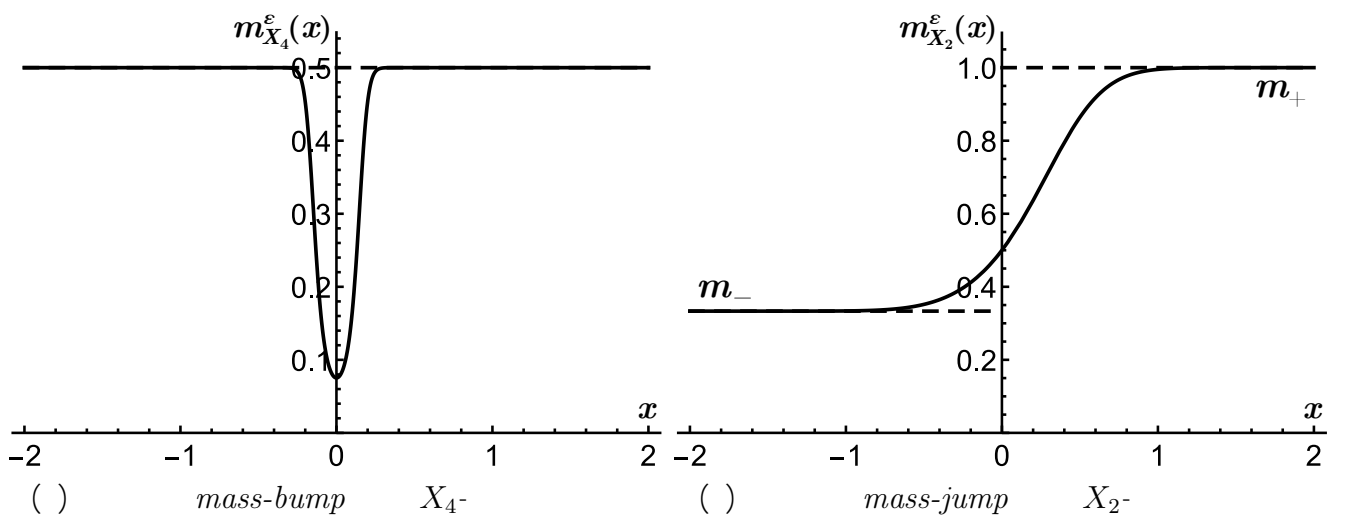


Рис. 1. Профіль ефективної маси для X_4 - та X_2 -розширення

Підрозділ 2.5 присвячено підтвердженню симетричних міркувань, розглянутих у **підрозділі 2.1** щодо X_2 -розширення, яке, на відміну від X_4 -розширення, крім

стрибка маси характеризується ще наявністю ненульового квантованого магнітного потоку. В цьому відношенні X_2 -розширення належить до тієї ж “магнітної” гілки, що і X_3 -розширення (4).

Магнітну природу точкових взаємодій можна продемонструвати, розмістивши їх на колі S^1 . У такій геометрії імпульс перетворюється на кутовий момент і стає квантованим із магнітним квантовим числом μ . Як відомо, немагнітні взаємодії не порушують виродження енергетичних рівнів з протилежними проєкціями кутового моменту ($E_\mu = E_{-\mu}$) – це відбувається лише у випадку магнітних взаємодій (зеєманівське розщеплення). В цьому відношенні існування квантованого магнітного потоку в X_2 -розширенні підтверджується явною демонстрацією зеєманівського розщеплення станів з протилежними проєкціями кутового моменту.

Отже всі граничні умови для гамільтоніана (1) за їх фізичною реалізацією можна звести у таблицю 3.

3

Класифікація граничних умов

М – матриця	1-параметрична група	Фізичні характеристики взаємодії
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X_1 & 1 \end{pmatrix}$	(1,0)	δ -потенціал
$\begin{pmatrix} 1 & X_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	R_+	стрибок маси (<i>mass-bump</i>)
$\begin{pmatrix} e^{i2\pi\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i2\pi\alpha} \end{pmatrix}$	$U(1)$	локалізований магнітний потік
$\begin{pmatrix} \frac{2+X_2}{2} & 0 \\ X_2 & \frac{2+X_2}{2} \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$	$R_+ \times Z$	стрибок маси (<i>mass-jump</i>) та квантований магнітний потік

Третій розділ присвячено детальному опису фізичної структури точково-подібних (сингулярних) взаємодій, пов’язаних із перевертанням спіну частинки.

У **підрозділі 3.1** узагальнюються результати **підрозділу 2.3** на випадок частинки зі спіном $s = 1/2$. Тобто замість гамільтоніана Шредінгера (1)

розглядається гамільтоніан Паулі [5*]:

$$\hat{H} = (\hat{p} - \mathbf{A})^2 + \varphi \hat{\sigma} H, \quad (6)$$

де $\hat{\sigma}$ – вектор матриць Паулі, H – напруженість зовнішнього магнітного поля, а \mathbf{A} , φ – векторний та скалярний потенціали відповідно.

Вимога збереження густини повного струму ймовірності, пов'язаного з гамільтоніаном (6),

$$\mathbf{J}_w = 2 [\text{Im} (\psi^* r) - \mathbf{A} \psi^*] + \text{rot} (\psi^* \boldsymbol{\sigma}), \quad = \begin{pmatrix} \psi'' \\ \psi_{\#} \end{pmatrix}$$

задає вид матриці граничних умов M аналогічно задачі, розглянутій у підрозділі 2.3. Крім діагонального вигляду матриці M , яка складається з двох блоків $M_{X_1,2,3,4}$, існує ще два випадки недіагонального вигляду:

$$M_{X_4^{(r)}, X_1^{(r)}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2X_4^{(r)} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2X_4^{(r)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2X_1^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2X_1^{(r)} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (8)$$

$$X_1^{(r)}, X_4^{(r)} \geq \mathbb{R},$$

які пов'язані з перевертанням спіну, тобто для цих точкових взаємодій спіновий оператор не комутує з гамільтоніаном. Причому $X_1^{(r)}$ - та $X_4^{(r)}$ -розширення є відповідними спіновими аналогами суто потенціальних взаємодій: δ -потенціалу і так званого нелокального δ^l -потенціалу (*mass-bump*).

В кінці підрозділу коротко розглядаються спіновий резонатор (рис. 2а) і спіновий фільтр (рис. 2б) – прості пристрої, що дозволяють практично застосувати особливості розглянутих точкових взаємодій, – та обговорюється залежність їх коефіцієнта пропускання від значення параметрів $X_1^{(r)}$ та $X_4^{(r)}$ і енергії налітаючої частинки. Окремо розглядається зонна структура періодичної гребінки, побудованої з вказаних точкових потенціалів.

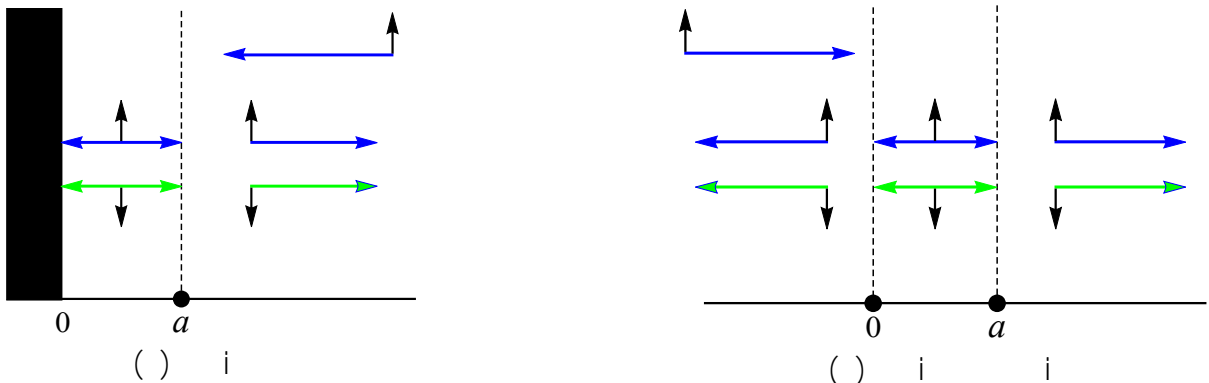


Рис. 2. Прості пристрої спінової фільтрації

Так, встановлено, що у випадку $X_4^{(r)}$ -резонатора навіть при дуже малих значеннях $X_4^{(r)}/a$ ймовірність перевертання спіна може досягати високих значень при достатньо великих енергіях падаючої частинки (див. рис. 3а). На відміну від цього, ймовірність перевертання спіну у випадку $X_1^{(r)}$ -резонатора зменшується зі збільшення енергії падаючої частинки (див. рис. 3б). Також встановлено, що зі зростанням енергії налітаючої частинки ймовірність перевертання спіну у випадку $X_4^{(r)}$ -фільтра починає домінувати над ймовірністю непервертання спіну (див. рис. 4а), а у випадку $X_1^{(r)}$ -фільтра, навпаки, зі зростанням енергії налітаючої частинки ймовірність перевертання спіну становиться значно меншою за ймовірність непервертання (див. рис. 4б).

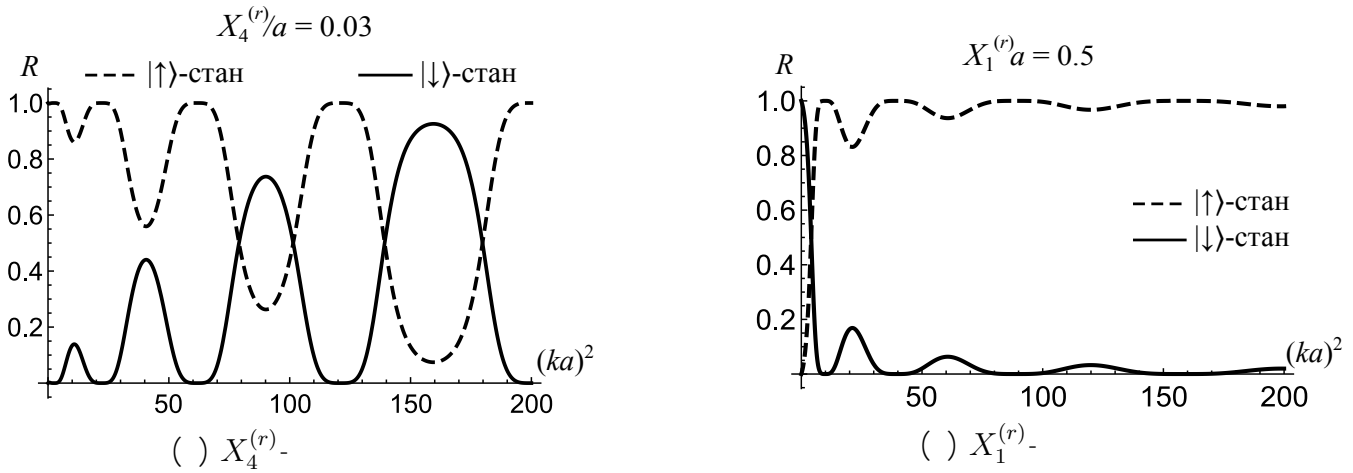


Рис. 3. Енергетична залежність коефіцієнта відбиття R для $X_4^{(r)}$ та $X_1^{(r)}$ резонаторів

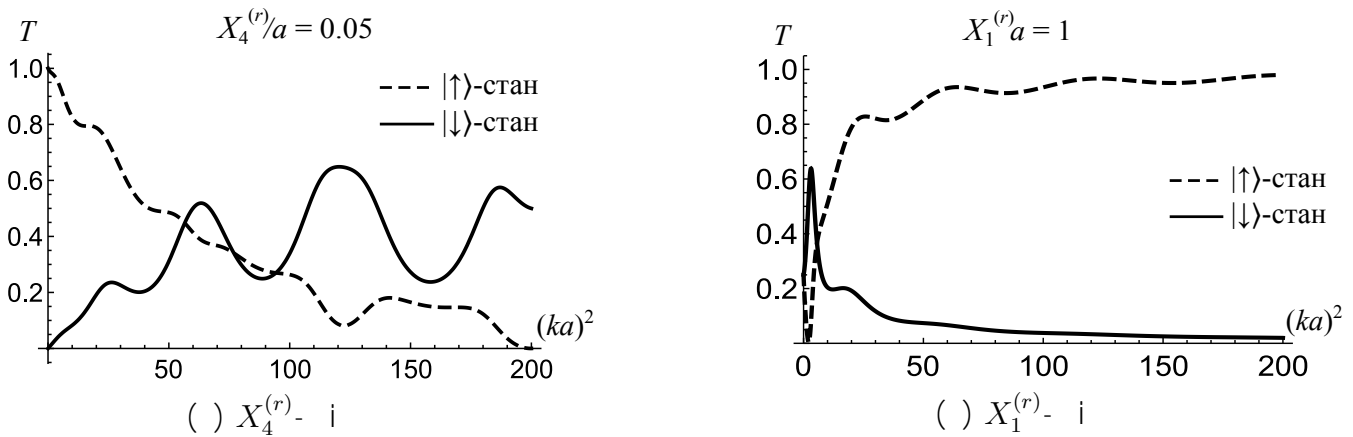


Рис. 4. Енергетична залежність коефіцієнта пропускання T для $X_4^{(r)}$ та $X_1^{(r)}$ фільтрів

Таким чином, на прикладі пристроїв спінової фільтрації показано, що $X_4^{(r)}$ -зв'язок є більш ефективним механізмом перевертання спіну.

Щодо структури зони для періодичної гребінки, то на відміну від безспінового випадку, розглянутого в [6*], наявність спінового ступіня вільності призводить до

подвоєння числа зон, а відповідні закони дисперсії мають вигляд:

$$\begin{aligned} \cos q a &= \cos k a \quad \frac{X_1^{(r)}}{k} \sin k a, \\ \cos q a &= \cos k a \quad X_4^{(r)} k \sin k a, \end{aligned}$$

де q – вектор квазіімпульсу.

Підрозділ 3.2 присвячено фізичній природі граничних умов із перевертанням спіну. Демонструється, що точкові взаємодії зі спін-перевертанням ($X_1^{(r)}$ - та $X_4^{(r)}$ -розширення) можуть бути ідентифіковані як спін-імпульсна взаємодія вигляду

$$\hat{H}_{SP} = \lambda \boldsymbol{\sigma} \cdot (r \boldsymbol{\varphi} \quad \hat{\mathbf{p}})$$

та є одновимірними аналогами взаємодії Рашби. Таким чином, розширення оператора Шредінгера, які фізично побудовані на основі неоднорідного розподілу потенціалу електричного поля $\varphi(x)$, можуть бути доповнені механізмом перевертання спіну.

У **підрозділі 3.3** розглядаються точкові збурення одновимірного оператора Шредінгера (1) на просторі $L_2 \times L_2$ двокомпонентних хвильових функцій (спінонів). Кількість граничних умов, що відповідають таким збуренням, порівняно із безспіновим випадком (див. [розділі 2](#)) збільшуються вдвічі.

Використовуючи техніку П. Курасова, що була розвинута в рамках теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів [1*], встановлено, що серед \mathbb{C}^4 -параметричної множини граничних умов які змішують компоненти вектора стану:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1^\circ \\ \psi_2 \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix}_{0+0} = \left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1^\circ + 2z_1 \psi_2 \\ \psi_2 \\ \psi_2^\circ + 2z_1 \psi_1 \end{pmatrix}_{0 \ 0}, \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_1^\circ + 2z_2 \psi_2^\circ \\ \psi_2 \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix}_{0 \ 0}, \begin{pmatrix} \psi_1 + 2z_3 \psi_2 \\ \psi_1^\circ \\ \psi_2 \\ \psi_2^\circ + 2z_3 \psi_1^\circ \end{pmatrix}_{0 \ 0}, \begin{pmatrix} \psi_1 + 2z_4 \psi_2^\circ \\ \psi_1^\circ \\ \psi_2 + 2z_4 \psi_1^\circ \\ \psi_2^\circ \end{pmatrix}_{0 \ 0} \right\}, \quad (9)$$

є тільки підмножина \mathbb{R}^2 -параметрів, сумісних зі спіновою інтерпретацією двокомпонентної структури хвильової функції. Крім того, ця підмножина параметрів була вже ідентифікована нами у [підрозділі 3.2](#) як інтенсивності точкових спін-імпульсних (Рашба) взаємодій, що виникають завдяки просторовій неоднорідності електростатичного бекграунду. Таким чином, інтерпретація двокомпонентної природи як спінового ступеня вільності відокремлює 2-параметричний набір \mathbb{R}^2 із набору \mathbb{C}^4 можливих розширень (9).

Зауважимо, що для розглянутої задачі ми взагалі-то не обмежені спіновою інтерпретацією двокомпонентної природи вектора стану та можемо інтерпретувати

його також в якості псевдоспіну, що розширює область застосування отриманого результату [7*].

У **підрозділі 3.4**, використовуючи техніку теорії розподілу, будується регуляризована форма гамільтоніана зі спін-перевертальною взаємодією

$$\hat{H} = (i D_x) \left(I + X_4^{(r)} \sigma_y \delta_\varepsilon(x) \right) (i D_x) + X_1^{(r)} \sigma_y \delta_\varepsilon(x), \quad (10)$$

що встановлює відповідність між граничними умовами (8) та точковими збуреннями, пов'язаними з перевертанням спіну.

Як видно зі структури рівняння (10), $X_1^{(r)}$ -зв'язок належить до взаємодії Рашби з “голим” носієм за рахунок неоднорідного електростатичного поля і поперечної складової імпульсу p_z . Те ж саме стосується $X_4^{(r)}$ -зв'язку, хоча в цьому випадку таке поле змінює член кінетичної енергії та, на наш погляд, пов'язано з просторовою залежністю ефективної маси. Таким чином, гранична умова, що відповідає цьому сингулярному розширенню, може бути реалізована в системах, де поширення частинки в середовищі призводить до її “одягання” та динамічного внеску в масовий оператор. Останнє, таким чином, очікується в матеріалах з просторово-змінною ефективною масою носіїв.

У **четвертому розділі** розглядається зв'язок між гамільтоніаном Боголюбова – де Жена для елементарних збуджень, локалізованих поблизу кору вихору Абрикосова, з гамільтоніаном Ааронова – Бома, що описує заряджену частинку в локалізованому магнітному полі. Демонструється, що ці гамільтоніани є еквівалентними для низькоенергетичних станів у квантовій границі ($T \neq 0$). Далі у межах аналітичного розв'язку задачі про ефект Ааронова – Бома з сингулярними збуреннями, розробленого в роботі [3*], будується модель електронної структури вихору Абрикосова та обчислюється відповідний спектр у квантовій границі.

У **підрозділі 4.1** розглядається редукція гамільтоніана Боголюбова – де Жена для низькоенергетичних зв'язаних станів. Згідно [8*] спектр найнижчих зв'язаних станів в ізольованому корі вихору Абрикосова істотно не залежить від конкретного просторового профілю параметра порядку (r) . Фактично лінійна залежність енергії цих станів від квантового числа кутового моменту μ визначається параметром граничного нахилу $d/dr|_{r=0}$:

$$\frac{E_\mu}{\gamma} = \frac{\mu}{k_F} \frac{d(r)/\gamma}{dr} \Big|_{r=0}. \quad (11)$$

Самоузгоджений підхід в [9*] показав, що цей параметр нахилу розходить-ся у квантовій границі $T \neq 0$ (аномалія Крамера – Пеши). Стиснення області кору призводить до зменшення числа зв'язаних станів [10*] та характеризується додатковим масштабом $\xi_1 \lesssim \xi_{BCS} = \xi_0/\pi$, де $\xi_0 = v_F/\gamma$, який обмежує область вихору до точки розриву похідної параметра порядку. Величина ξ_1 також визначає відстань від осі вихору, на якій густина надструму досягає свого максимуму [11*].

Тому відстань ξ_1 можна розглядати як ще один характерний масштаб розміру серцевини вихору. Таким чином, цілком природньо, що для надпровідників з $\kappa > 1$ внаслідок сильної локалізації магнітного поля вихор можна розглядати як точково-подібну особливість, подібно до ситуації з гамільтоніаном Ааронова–Бома. На підтвердження цієї позиції можна також віднести той факт, що спектр локалізованих станів низькоенергетичних збуджень надпровідника поблизу ізольованого кору вихору Абрикосова подібний до рівнів Ландау з ефективною областю локалізації порядку радіуса кору вихору ξ_1 . Цей радіус відповідає ефективному полю (порядку верхнього критичного поля $H_{c2} \approx \kappa^2 H_c$ [12*]), поява якого пояснюється якраз когерентним андреевським відбиттям електронів та дірок кору вихору від конденсату куперовських пар, який характеризується просторовим профілем параметра порядку $\psi(\mathbf{r})$.

У зв'язку з вищезазначеними аргументами, був запропонований дещо інший підхід до трактування низькоенергетичних зв'язаних станів поблизу кору вихору у квантовій границі $T \rightarrow 0$, який оснований на самоспряженому розширенні гамільтоніана типу Ааронова–Бома з локалізованим магнітним полем

$$\hat{H}_{\phi_{core}} = \hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{(\phi_{core} + 1/2)^2}{r^2}, \quad (12)$$

де

$$\phi_{core} = \frac{\phi_{core}}{\phi_0} = \left(\frac{\xi_1}{\xi_0} \right)^2.$$

Таким чином, внутрішня структура кору вихору визначається параметрами відповідних граничних умов для гамільтоніана (12). Параметри цих умов пов'язані з фізичними параметрами границі $\xi_1 \neq 0$, такими як $k_F \xi_1$ та ξ_1/ξ_0 , коли нахил параметра порядку стає сингулярним. Це дає можливість описати аномалію Крамера–Пеши (нахил параметра порядку $d\psi(r)/dr$) у корі вихору Абрикосова.

Для оцінки значення ϕ_{core} для реальних матеріалів використовуються експериментальні дані [10*] для надпровідників, у яких $1 < k_F \xi_0 < 16$. На основі цих даних побудована залежність $\ln(\xi_1/\xi_0)$ від $\ln(k_F \xi_0)$ у квантовій границі для різних значень $k_F \xi_0$ (див. рис. 5).

Ця залежність апроксимована формулою

$$\ln(\xi_1/\xi_0) = \ln(3/4) - 0.72 \ln(k_F \xi_0),$$

що призводить до залежності ϕ_{core}

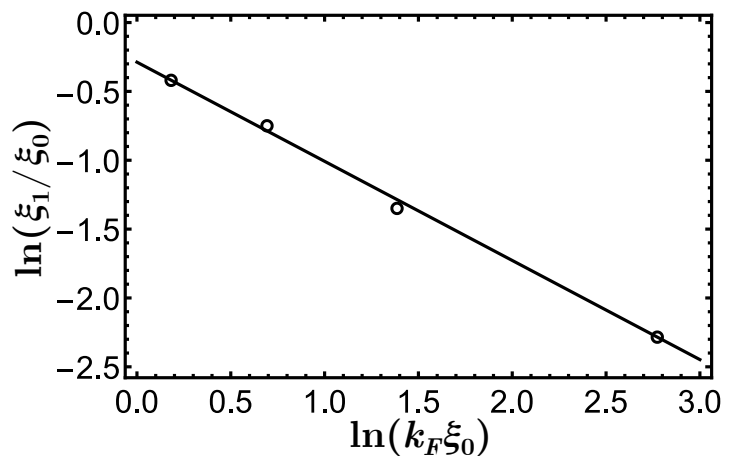


Рис. 5. Залежність $\ln(\xi_1/\xi_0)$ від $\ln(k_F \xi_0)$. Точки – експериментальні дані [10*]

від параметру надпровідника $k_F \xi_0$

$$\phi_{core} = \frac{1}{2} \frac{1}{(k_F \xi_0)^{1.44}} < \frac{1}{2}.$$

Підрозділ 4.2 присвячений знаходженню аналітичного виразу для енергії основного стану E_0 елементарних збуджень у корі вихору у квантовій границі ($T \neq 0$) як функції параметру надпровідника $k_F \xi_0$. Для цього в рамках розв'язку гамільтоніана Ааронова–Бома, розробленого в роботі [3*], будується модель електронної структури вихору Абрикосова та знаходиться енергія основного стану елементарних збуджень від параметру граничної умови b

$$\frac{E_0(\phi_{core})}{\gamma} = \frac{2}{k_F \xi_0} \left(\frac{b - (1/2 - \phi_{core})}{(3/2 + \phi_{core})} \right)^{2/(1+2\phi_{core})}. \quad (13)$$

Граничний параметр b знаходимо в результаті порівняння нахилів законів дисперсії для (13) та (11) при фіксованому γ , оскільки параметри ϕ_{core} і μ входять однаковим чином у відповідні гамільтоніани Ааронова–Бома та Боголюбова–де Жена:

$$\partial(E_0(\phi_{core}))/\partial \phi_{core}|_{\phi_{core}=0} = \partial(E_\mu)/\partial \mu|_{\mu=0} \Rightarrow b = 0.53. \quad (14)$$

На рис. 6 наведено порівняння виразу (13), враховуючи отримане значення для b в (14), з емпіричним виразом [10*]:

$$\frac{E_{1/2}}{\gamma} = \frac{\ln(k_F \xi_0/0.3)}{2 k_F \xi_0} \quad (15)$$

для енергій основного стану елементарних збуджень у корі вихору у квантовій границі ($T \neq 0$) як функцій параметру надпровідника $k_F \xi_0$. Крім того, отримані результати також порівнюються з чисельним розв'язком рівнянь Боголюбова–де Жена у квантовій границі для чистого s -хвильового надпровідника [10*].

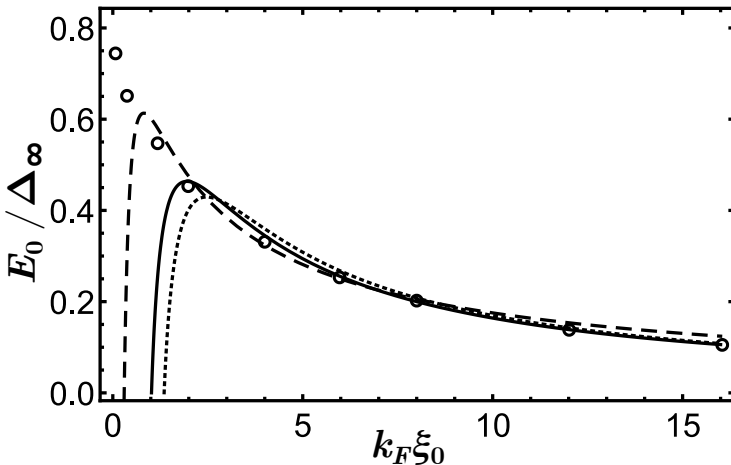


Рис. 6. Енергія основного стану E_0/γ як функція $k_F \xi_0$. Суцільна лінія – вираз (13) для b , заданому (14); пунктирна лінія – вираз (15); точкова лінія – залежність $E_0(\phi_{core})/\gamma$ від $k_F \xi_0$ для $\phi_{core} = (k_F \xi_0)^{-2}$. Точки – чисельний розрахунок [10*]

Зауважимо, що асимптотична поведінка отриманої енергії основного стану відрізняється від емпіричного результату (15) і має краще узгодження для великих значень $k_F \xi_0$ навіть із урахуванням того, що жодних підгінних параметрів для описання результатів комп'ютерного моделювання не використовувалося.

ВИСНОВКИ

1. Вперше проведено класифікацію сингулярних збурень одновимірного оператора Шредінгера для вільної частинки на основі аналізу порушень калібрувальної симетрії.
2. Вперше встановлено відповідність точкових взаємодії X_4 та X_2 двом якісно різним просторовим профілям оператора ефективної маси елементарного збудження у перехідній області: *mass-bump* та *mass-jump* відповідно. Показано, що особливістю X_2 -взаємодії є наявність квантованого магнітного потоку, на відміну від X_4 -взаємодії, яка має суто “електростатичний” характер.
3. Показано, що для гамільтоніана Паулі точкові взаємодії із перевертанням спіну є сингулярними границями релятивістської спин-імпульсної взаємодії виду $\hat{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{E} - \hat{\mathbf{p}})$. Вони є одновимірними аналогами такої взаємодії, яка виникає у шаруватих матеріалах завдяки просторовій неоднорідності електричного потенціалу. Існують тільки два типи таких розширень ($X_1^{(r)}$ та $X_4^{(r)}$), які є спіновими аналогами суто потенціальних взаємодій δ -потенціалу і нелокального δ^ℓ -потенціалу (*mass-bump*). Цей результат також отримано вперше.
4. Встановлено еквівалентність між гамільтоніаном Боголюбова–де Жена для низькоенергетичних збуджень у корі вихору Абрикосова в квантовій границі ($T \neq 0$) з гамільтоніаном типу Ааронова–Бома із сингулярним збуренням, який відповідає параметру граничної умови b , що визначає внутрішню структуру кору вихору. Такий еквівалентний підхід дав можливість описати аномалію Крамера–Пеши нахилу параметра порядку $d(r)/dr$ у корі вихору Абрикосова.
5. Отримано аналітичний вираз для енергії основного стану E_0 низькоенергетичних збуджень у корі вихору Абрикосова як функції радіуса кору вихору ξ_0 . Цей вираз добре узгоджується з відомими результатами, отриманими з чисельного розв'язку рівнянь Боголюбова–де Жена.

СПИСОК ЦИТОВАНИХ РОБІТ

- 1*. Kurasov P. [Distribution Theory for Discontinuous Test Functions and Differential Operators with Generalized Coefficients](#) / P. Kurasov // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1996. — Vol. 201. — P. 297 – 323.
- 2*. Zolotaryuk A. V. [Point Interactions With Bias Potentials](#) / A. V. Zolotaryuk, G. P. Tsironis, Y. Zolotaryuk // Frontiers in Physics. — 2019. — Vol. 7. — P. 87.

- 3*. Dabrowski L. [Aharonov–Bohm effect with \$\delta\$ -type interaction](#) / L. Dabrowski, P. Šťov'íček // J. Math. Phys. — 1998. — Vol. 39, № 1. — P. 47 – 62.
- 4*. Boya L. J. [Point interactions from flux conservation](#) / L. J. Boya, E. C. G. Sudarshan // International Journal of Theoretical Physics. — 1996. — Vol. 35. — P. 1063 – 1068.
- 5*. Landau L. D. [Course of Theoretical Physics, Volume III: Quantum Mechanics \(Non-Relativistic Theory\)](#) / L. D. Landau, L. M. Lifshitz. — Oxford: Butterworth-Heinemann, 1981. — P. 689.
- 6*. Albeverio S. [Solvable Models in Quantum Mechanics](#) / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden — AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, USA, 2005. — P. 488.
- 7*. Pesin Dmytro. [Spintronics and pseudospintronics in graphene and topological insulators](#) / D. Pesin, A. H. MacDonald // Nature Materials. — 2012. — Vol. 11. — P. 409.
- 8*. Caroli C. [Bound Fermion states on a vortex line in a type II superconductor](#) / C. Caroli, P. G. de Gennes, J. Matricon // Physics Letters. — 1964. — Vol. 9, № 4. — P. 307 – 309.
- 9*. Kramer L. [Core structure and low-energy spectrum of isolated vortex lines in clean superconductors at \$T \ll T_c\$](#) / L. Kramer, W. Pesch // Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei. — 1974. — Mar. — Vol. 269, № 1. — P. 59 – 64.
- 10*. Hayashi N. [Low-Lying Quasiparticle Excitations around a Vortex Core in Quantum Limit](#) / N. Hayashi, T. Isoshima, M. Ichioka, K. Machida // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80, № 13. — P. 2921 – 2924.
- 11*. Sonier J. E. [\$\mu\$ SR studies of the vortex state in type-II superconductors](#) / J. E. Sonier, J. H. Brewer, Robert F. K. // Rev. Mod. Phys. — 2000. — Vol. 72, № 3. — P. 769 – 811.
- 12*. Bardeen J. [Structure of Vortex Lines in Pure Superconductors](#) / J. Bardeen, R. Kümmel, A. E. Jacobs, L. Tewordt // Phys. Rev. — 1969. — Vol. 187. — P. 556 – 569.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kulinskii V. L. [Localized states near the Abrikosov vortex core in type-II superconductors within zero-range potential model](#) / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. — 2015. — Vol. 6, № 3. — P. 353 – 360. DOI: [10.17586/2220-8054-2015-6-3-353-360](https://doi.org/10.17586/2220-8054-2015-6-3-353-360) (WoS).
2. Kulinskii V. L. [Physical structure of point-like interactions for one-dimensional Schrödinger and the gauge symmetry](#) / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Physica B: Condensed Matter. — 2015. — Vol. 472. — P. 78 – 83. DOI: [10.1016/j.physb.2015.05.011](https://doi.org/10.1016/j.physb.2015.05.011) (Scopus, WoS, Q 2).

3. Kulinskii V. L. Mass-jump and mass-bump boundary conditions for singular self-adjoint extensions of the Schrödinger operator in one dimension / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Annals of Physics.— 2019. — Vol. 404. — P. 47 – 56. DOI: [10.1016/j.aop.2019.03.001](https://doi.org/10.1016/j.aop.2019.03.001) (Scopus, WoS, Q 2).
4. Kulinskii V. L. Point-Like Rashba Interactions as Singular Self-Adjoint Extensions of the Schrödinger Operator in One Dimension / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Frontiers in Physics. — 2019. — Vol. 7. — P. 44:1 – 8. DOI: [10.3389/fphy.2019.00044](https://doi.org/10.3389/fphy.2019.00044) (Scopus, WoS, Q 2).
5. Kulinskii V. L. Singular spin-flip interactions for the 1D Schrödinger operator / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Physica Scripta. — 2019. — Vol. 95, № 1. — P. 015205:1 – 7. DOI: [10.1088/1402-4896/ab4746](https://doi.org/10.1088/1402-4896/ab4746) (Scopus, WoS, Q2).

Матеріали дисертації додатково представлено в тезах наукових конференцій:

6. Panchenko D. Yu. The electronic structure of the Abrikosov vortex core and the pinning on a cylindrical defect. / V. L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // 3-rd Conference “Statistical Physics: Modern Trends and Applications” June 23 – 25, 2009, Lviv, Ukraine. Book of abstracts. — Lviv, 2009.
7. Панченко Д. Ю. Модель электронной структуры сердцевин абрикосовского вихря и механизм пиннинга в пределе $\kappa \ll 1$. / Д. Ю. Панченко // Сучасні проблеми теоретичної фізики 24 – 26 грудня 2009, Київ, Україна. Тези доповідей. — Київ, 2009. — С. 42.
8. Panchenko D. Yu. The electronic structure of the Abrikosov vortex core and the mechanism pinning in limit $\kappa \ll 1$. / D. Yu. Panchenko // The 1st International Conference for Young Scientists “Low Temperature Physics” June 7 – 11, 2010, Kharkov, Ukraine. Book of abstracts. — Kharkov, 2010. — P. 173.
9. Panchenko D. Yu. Physics of singular self-adjoint extensions of one-dimensional Schrödinger operator. / D. Yu. Panchenko // VII Young Scientists Conference “Problems of Theoretical Physics” December 13 – 15, 2016, Kyiv, Ukraine. Book of abstracts. — Kyiv, 2016. — P. 36.
10. Panchenko D. Yu. Physics of singular self-adjoint extensions of one-dimensional Dirac operator. / D. Yu. Panchenko // IX Conference of Young Scientists “Problems of Theoretical Physics” December 04 – 05, 2018, Kyiv, Ukraine. Book of abstracts. — Kyiv, 2018. — P. 26.
11. Panchenko D. Yu. Physics of singular self-adjoint extensions of one-dimensional Schrödinger and Pauli operators. / V.L. Kulinskii, D. Yu. Panchenko // Bogolyubov Kyiv Conference “Problems of theoretical and mathematical physics” September 24 – 26, 2019, Kyiv, Ukraine. Book of abstracts. — Kyiv, 2019. — P. 103.

АНОТАЦІЯ

Структура точкових збурень оператора Шредінгера в одновимірних та двовимірних квантових системах. —

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.04.02 — теоретична фізика (104 — фізика та астрономія). — Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса 2020.

Дисертаційна робота присвячена фізичній структурі точкових збурень оператора Шредінгера та їх реалізації в одновимірних (шаруватих) та двовимірних (на прикладі вихору Абрикосова) квантових системах.

На основі аналізу порушень калібрувальної симетрії для одновимірного оператора Шредінгера вільної безспінової частинки отримано класифікацію точкових взаємодій для такого оператора. Встановлено, що існують два збурення (X_1 та X_4) потенціальної та два збурення (чисте X_3 та змішане X_2) “магнітної” природи. З’ясовано, що точкові взаємодії X_4 та X_2 можуть бути реалізовані в шаруватих системах із суттєвою неоднорідністю ефективної маси елементарного збудження. Причому вони відповідають якісно різним характеристам зміни ефективної маси в перехідній області. Більш того, у випадку X_2 -взаємодії є додатковий квантований магнітний потік, тоді як випадок X_4 має суто “електростатичний” характер. Для гамільтоніана Паулі (частинки зі спіном) також отримано всі можливі точкові взаємодії, серед яких визначені ті які пов’язані з перевертанням спіну та розглядаються як одновимірні аналоги спін-імпульсної взаємодії Рашби.

Фізична реалізація точкових збурень оператора Шредінгера у двовимірній геометрії досліджується на прикладі електронної структури вихору Абрикосова. На основі аналітичного розв’язку задачі про ефект Ааронова – Бома з сингулярними збуреннями побудовано модель електронної структури вихору Абрикосова та обчислено спектр елементарних збуджень у квантовій границі ($T \neq 0$).

i : точково-подібні взаємодії, сингулярні самоспряжені розширення оператора Шредінгера, калібрувальна симетрія, густина струму ймовірності, матриця граничних умов, *mass-bump*, *mass-jump*, квантований магнітний потік, спін-імпульсна взаємодія Рашби, вихор Абрикосова.

АННОТАЦИЯ

Структура точечных возмущений оператора Шредингера в одномерных и двумерных квантовых системах. —

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.02 — теоретическая физика (104 — физика и астрономия). — Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, Одесса 2020.

Диссертационная работа посвящена физической структуре точечных возмущений оператора Шредингера и их реализации в одномерных (слоистых) и двумерных (на примере вихря Абрикосова) квантовых системах.

На основе анализа нарушений калибровочной симметрии для одномерного оператора Шредингера свободной безспиновой частицы получено классификацию точечных взаимодействий такого оператора. Установлено, что существуют два возмущения (X_1 и X_4) потенциальной и два возмущения (чистое X_3 и смешанное X_2) “магнитной” природы. Выяснено, что точечные взаимодействия X_4 и X_2 могут быть реализованы в слоистых системах с существенной неоднородностью эффективной массы элементарного возбуждения. Причем они соответствуют качественно различным характерам изменения эффективной массы в переходной области. Более того, в случае X_2 -взаимодействия присутствует дополнительный квантованный магнитный поток, тогда как случай X_4 носит сугубо “электростатический” характер. Для гамильтониана Паули (частицы со спином) также получены все возможные точечные взаимодействия, среди которых определены те, которые связаны с переворачиванием спина и рассматриваются как одномерные аналоги спин-импульсного взаимодействия Рашбы.

Физическая реализация точечных возмущений оператора Шредингера в двумерной геометрии исследуется на примере электронной структуры вихря Абрикосова. На основе аналитического решения задачи об эффекте Ааронова–Бома с сингулярными возмущениями строится модель электронной структуры вихря Абрикосова и вычисляется соответствующий спектр в квантовой границе ($T \neq 0$).

: точно-подобные взаимодействия, сингулярные самосопряженные расширения оператора Шредингера, калибровочная симметрия, плотность тока вероятности, матрица граничных условий, *mass-bump*, *mass-jump*, квантованный магнитный поток, спин-импульсное взаимодействие Рашбы, вихрь Абрикосова.

ABSTRACT

Panchenko D. Yu. **The structure of point perturbations of the Schrödinger operator in one-dimensional and two-dimensional quantum systems.** — *Manuscript.*

Thesis for the Candidate of Sciences degree (PhD) in Physics and Mathematics by specialty 01.04.02 — theoretical physics (104 — physics and astronomy). — Odessa I. I. Mechnikov National University, Odessa 2020.

Thesis is devoted to the physical structure of point perturbations of the Schrödinger operator and their realizations in one-dimensional (layered) and two-dimensional (Abrikosov vortex) quantum systems.

The classification of singular point perturbations of the one-dimensional Schrödinger operator for a spinless free particle is obtained on the basis of calibration transformations analysis. It is shown that all point perturbations can be divided into two classes: “electric” and “magnetic” related to the mass and charge of a particle correspondingly. The mass calibration is associated with the choice of the spatial scale $x \neq \lambda x$, and the charge calibration with the canonical transformation $\hat{p}_x \neq \hat{p}_x - A$.

It is shown that so called point interactions X_4 and X_2 (in accordance with the Kurasov's notation, see [1*]) can be realized in layered systems where the effective mass of elementary excitation with qualitatively different character in the transition region takes place. Moreover, the X_2 -coupling has an additional quantized magnetic flux, whereas the case of X_4 is purely of "electrostatic" nature. The existence of quantized magnetic flux in X_2 -case is proven by explicit demonstration of the Zeeman-like splitting for states with the opposite projections of angular momentum.

The point interactions ($X_1^{(r)}$ and $X_4^{(r)}$) associated with the spin-flip interaction are also identified as one-dimensional analogs of the Rashba interaction. The considered simple spin-filtering devices (spin-resonator and spin-filter) allow us to establish that the case of boundary conditions with $X_4^{(r)}$ -coupling is more effective than the one with $X_1^{(r)}$ -coupling as spin-flip mechanism. Also, using the technique of distribution theory (in accordance with [1*]), a regularized form of the Hamiltonian with spin-flip interaction is constructed, which establishes correspondences between boundary conditions and point perturbations associated with spin-flip.

The physical nature of Schrödinger operator point perturbations in two-dimensional geometry is investigated on the example of the Abrikosov vortex. In particular, a relationship has been established between the Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian for elementary excitations, localized near the Abrikosov vortex core, and the Aaronov – Bohm Hamiltonian, which describes a charged particle in the localized magnetic field. The equivalence of these Hamiltonians is demonstrated for the case of low-energy states in the quantum limit ($T \rightarrow 0$). In this regard, a different approach to the interpretation of low-energy states near the Abrikosov vortex core in the quantum limit was proposed, based on self-adjoint extension of the Aaronov – Bohm-type Hamiltonian with a localized magnetic field, within which the inner structure of the vortex is determined by the parameter of the corresponding boundary condition. This allows us to describe the Kramer – Pesch anomaly of the order parameter slope $d \langle r \rangle / d r$ in the Abrikosov vortex core.

Finally, the model of the electronic structure of the Abrikosov vortex is constructed and the corresponding spectrum in the quantum limit is calculated based on the analytical solution for the Aharonov – Bohm effect with singular perturbations.

Key words: point-like interactions, singular self-adjoint extensions of the Schrödinger operator, gauge symmetry, probability current, matrix of boundary conditions, *mass-bump*, *mass-jump*, quantum magnetic flux, spin-momentum (Rashba) interactions, Abrikosov vortex.